

Charles-Jean de La Vallée Poussin

**COLLECTED WORKS
OEUVRES SCIENTIFIQUES**

Volume III

Approximate theory, Fourier analysis,
quasi-analytic functions

Théorie de l'approximation, analyse de Fourier,
fonctions quasi-analytiques

Edited by
Edité par

**Paul Butzer Jean Mawhin
 Pasquale Vetro**



ACADEMIE ROYALE
DE BELGIQUE



CIRCOLO MATEMATICO
DI PALERMO

2004

Charles-Jean de La Vallée Poussin

**COLLECTED WORKS
OEUVRES SCIENTIFIQUES**

Volume III

Approximation theory, Fourier analysis,
quasi-analytic functions

Théorie de l'approximation, analyse de Fourier,
fonctions quasi-analytiques

Edited by
Édité par

Paul Butzer Jean Mawhin
 Pasquale Vetro

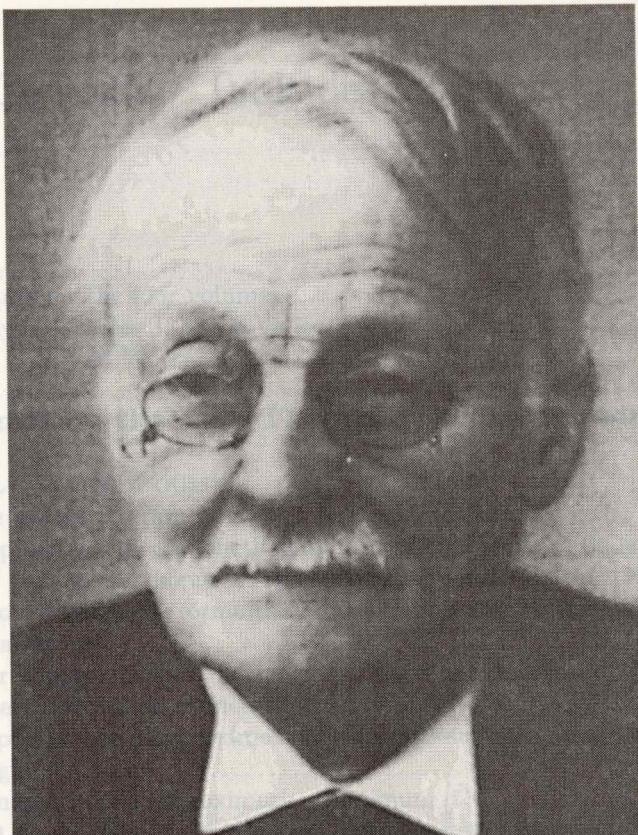


ACADEMIE ROYALE
DE BELGIQUE



CIRCOLO MATEMATICO
DI PALERMO

2004



Preface
Commentary
Bibliography
Plan of the book

Approximation of functions

CH. I. de L'approximation

(Theorems of approximation)	
Sur l'approximation des fonctions et des dérivées	3
Sur la construction des fonctions équilibrantes	65
Note sur l'approximation d'une fonction dérivée à l'aide d'un polynôme	149
Sur les polynômes d'approximation d'un angle	157
Sur la méthode de l'approximation par rapport à un intervalle	195
Rapport sur les polynômes d'approximation à une variable complexe [53]	211
Sur les expressions qui sont de la Vallée Poussin dans un intervalle [55]	215
Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné [67]	233
Sur le maximum du module de la dérivée d'une expression trigonométrique d'ordre et de module bornés [68]	237
Sur l'approximation des fonctions [70]	241
L'approximation des fonctions d'une variable réelle [66]	247
L'approximation des fonctions de variable réelle [73]	273
On the approximation of functions of a real variable and on some analytic functions [76]	305

Contents – Table des matières

Foreword	ix
Commentators for the four volumes	xiii
Bibliography of Charles J. de La Vallée Poussin	xv
Plan of the Collected Works	xxv

Approximation theory – Théorie de l'approximation

CH.J. DE LA VALLÉE POUSSIN :

(The numbers in brackets refer to the bibliography, p. xiii)

Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier [45] ..	3
Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes [46]	65
Note sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée [46]	149
Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle [52]	157
Sur la méthode de l'approximation minimum [53]	195
Rapport de M. de la Vallée Poussin, premier commissaire [R-25] ..	211
Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe [55] ..	215
Sur les expressions qui s'écartent le moins de zéro dans un intervalle [65]	229
Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné [67]	233
Sur le maximum du module de la dérivée d'une expression trigonométrique d'ordre et de module bornés [68]	237
Sur l'approximation des fonctions [70]	241
L'approximation des fonctions d'une variable réelle [66]	247
L'approximation des fonctions de variable réelle [73]	273
On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions [76]	305

P.L. BUTZER and R.J. NESSEL :	
Work of De La Vallée Poussin in approximation theory and its impact	375
J. MEINGUET :	
On de La Vallée Poussin's paper in Chebyshev approximation	415
P.L. BUTZER and R.L. STENS :	
De La Vallée Poussin's article of 1908 on interpolation and sampling theory, and its influence	421

Fourier analysis and quasi-analytic functions Analyse de Fourier et fonctions quasi-analytiques

CH.J. DE LA VALLÉE POUSSIN :	
<i>(The numbers in brackets refer to the bibliography, p. xiii)</i>	
Sur une démonstration des formules de Fourier généralisées [1]	457
Sur la série de Weierstrass représentant une fonction continue sans dérivée [4]	461
Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson [11]	467
Sur la fonction sans dérivée de Weierstrass [35]	483
Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier [54]	487
Sur l'unicité du développement trigonométrique. Résumé [57]	491
Sur l'unicité du développement trigonométrique [57]	495
Sur l'unicité du développement trigonométrique.	
Note additionnelle [58]	513
Sur les fonctions quasi-analytiques de variables réelles [73]	519
Quatre leçons sur les fonctions quasianalytiques de variable réelle [75]	523
Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr [78]	553
Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr.	
Note complémentaire et explicative [80]	571
J.P. KAHANE :	
Charles de La Vallée Poussin et les séries de Fourier	573
H. GÜNZLER :	
De La Vallée Poussin's paper of 1927 on almost periodic functions	587
H. GÜNZLER :	
De La Vallée Poussin's contribution to the theory of quasi-analytic functions	599

Foreword

Charles de La Vallée Poussin's (VP for short) profound contributions encompassed several areas of mathematics, thus number theory, the subject of Volume I, integration theory, ordinary differential equations, and probability, the topics under consideration in Volume II, but also the broad areas of approximation and interpolation theory, Fourier analysis and quasi-analytic functions, the subjects of the present Volume III. Volume IV will include conformal representation, potential theory and complex function theory.

The papers are organized by coherence of subject matter rather than by chronology, so that VP's intellectual evolution may stand out. Volume I also included several papers on the life and work of de La Vallée Poussin by different authors, together with articles on the mathematical environment of VP at his home university, the University of Louvain (Leuven), his connections with the *Société Scientifique de Bruxelles*, founded in 1875, the *Académie Royale de Belgique*, founded in 1769/72, as well as with four scientific and academic institutions in Italy, including the renowned *Circolo Matematico di Palermo*, founded by G. B. Guccia together with 27 colleagues in 1884.

As indicated, the present volume covers VP's work in approximation, Fourier analysis and quasi-analytic functions. In fact, VP's first paper ever written, his paper of 1891 (recall the List, Vol. I, p. 81), deals with Fourier series, likewise does his 11th paper of 1893. We are indebted to Professor Jean-Pierre Kahane for comments on these papers as well as further ones in the area, including VP's basic articles of 1912/1913 on the uniqueness of trigonometric series. These comments emphasize that whereas Fejér is highly acclaimed for his famous result of 1900 on the uniform convergence of the arithmetic means of Fourier series for any continuous, 2π -periodic function, the first two papers by VP, precursors in the matter for the years 1885–1900, have remained unnoticed, especially the article of 1893 concerned with Abel-Poisson summability of Fourier series (instead of their arithmetic means).

The almost periodic functions, which are more difficult to handle than purely periodic functions, are generally said to have been created by Harald Bohr in 1923/1924. In his very informative analysis Professor Hans Günzler comes to the conclusion that VP introduced and used methods and results from the theory of almost periodic functions 28 years before Bohr and 10 years before Piers Bohl's work on "quasi-periodic" functions. They in fact occur in VP's epoch-making proof of the prime number theorem of 1895. We are also very thankful to Professor Günzler for his commentary to VP's work on quasi-analytic

functions, introduced and studied by Borel, Denjoy and Carleman. VP gave the first complete proof of the results of these authors, together with several basic simplifications; VP was the first to have used Fourier series in the study of quasi-analytic functions, and his results show that Fourier series are the natural tool in treating such questions.

VP's second research monograph is devoted to approximation theory, a field in which he worked from 1908 to circa 1925. It is his masterpiece "*Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle* (1919)", the first book in the subject. It dominated the field for the next 40 years and covered practically every area of the subject at the time, a good part of VP's major own contributions of 10 papers as well as the resolution of his famous conjectures of 1908, 1911 and 1912 by S.N. Bernstein of Kharkow and D. Jackson of Harvard (doctorate at Göttingen), which were crowned by the *Académie Royale*.

In the first half of this volume one finds all of VP's articles in the area, three different themes being followed by three commentaries, written by Professors Rolf Nessel, Jean Meinguet and Rudolf Stens, the first and third being in collaboration with an editor. The first commentary covers approximation theory in general, the second the *Chebyshev problem for linear equations*, keywords being minimax criterion, second method of Remez, linear programming - it was the advent of high speed computing machines. The third commentary deals with VP's long article of 1908 on the convergence with rates of interpolation formulae, the root to modern sampling theory for duration limited signals.

Recalling the commentary to VP's three articles on differential equations in Volume II (pp. 301-401), there exist at least 200 papers following up the matter; of these 150 even have the name of VP in the title of their papers. The impact of some of VP's results in this volume are just as spectacular: Checking the computer under MathSciNet it will be observed that there are a couple of thousand papers mentioning VP in their bibliography, and some 250 papers in which VP's name is to be found in the titles of these papers. This refers especially to VP's papers on the singular integral of (Landau)-de La Vallée Poussin, his delayed means, as well as his extension of the alternation theorem.

All in all, this is indeed a "heavy" volume. It again shows de La Vallée Poussin at his very best. He was a "lone-ranger" in mathematics without a real school, apparently without a "lobby" behind him, his homeland being a small country¹.

What a pity for mathematics!

In our biography² of VP we listed some of the foreign mathematicians attending the celebrations on the occasion of VP's 35 years in office at Louvain University on May 13, 1928. In the area of approximation theory there were

¹The "golden age" of mathematics in Belgium was the period c. 1540-1685, the time of de Sluse. See the *Actes du Colloque International "René-François de Sluse"*, Amay-Liège-Visé, March 1985 (edited by R. Halleux and F. Jongmans) in: Bull. Soc. Roy. Sci. de Liège 55 (1986), pp. 1-269, in particular the contributions by R. Taton, *La vie mathématique à la mort de Sluse* (1985), and Butzer-A.Schaffrath, *Mathematics in Belgium from the time of Charlemagne to the seventeenth century*.

²See the biography in Vol. I, p. 6.

present the chief actors, Sergej Bernstein (who is listed there – surprisingly – as professor at Nancy University), Dunham Jackson from Minnesota, Leopold Fejér from Budapest, as well as many other representatives in the area. In the area of interpolation and sampling theory there are the renowned experts Edmund Whittaker from Edinburgh and Nils Nörlund from Copenhagen, in Fourier analysis there are Geoffrey Hardy from Oxford, and Michel Plancherel from Zurich, in almost periodic functions there is Harald Bohr from Copenhagen, in quasi-analytic functions³ it is Arnaud Denjoy and Jacques Hadamard. The fields represented by these mathematicians — known to all of us — are a part of the present volume.

The short biographies attached as footnotes to the commentaries have been prepared by the editors, so they are thus also responsible for their contents. Since these have caught the pleasant attention of several readers of Vol. I, a list of all the mathematicians covered in the biographical notes will be added to Vol. IV; the volume where they are to be found will be noted. The mathematicians covered were either cited by VP, somehow connected with him, or followed up his work in his time.

The editors of these *Collected Works* would indeed like to thank Rudolf Stens, Aachen, for his invaluable help in preparing the six commentaries of the present volume together with the associated biographical notes for print. The editors again wish the readers of this volume to have as much pleasure in studying them as had the authors of the commentaries and the editors in their work and preparations.

Northern Ireland

- J.A. JENKINS, Professor Emeritus, Washington University, St. Louis, USA
- L. KAKANIS, Professor Emeritus, Université de Paris-Sud, Orsay, France
P. L. Butzer (Aachen) J. Mawhin (Louvain-la-Neuve)
- J. MAWHIN, Professor, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium
P. Vetro (Palermo)
- J. MEinguET, Professor Emeritus, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium
- A.P. MONNA (1909-1995), Professor Emeritus, University of Utrecht, The Netherlands
- P. NASTASI, Professor, University of Palermo, Italy
- R.J. STENS, Professor, Aachen University of Technology, Germany

³Apart from these great names, many further non-Belgians participated in this illustrious celebration. Since not all of them were listed in Vol. I, p. 6, let us add them here: Bliss, Blichfeldt, G. D. Birkhoff, Coolidge, de Lury, de Toledo, Dickson, Evans, Fine, Fréchet, Gianfranceschi, Goursat, Hedrick, Julia, Kasner, Levi-Civita, Montel, Petrovitch, Picard, Pincherle, Plans Freye, Saltikov, Severi, Skinner, Sierpinski, Veblen, Villat and Volterra.

Abbreviations used

DSB = *Dictionary of Scientific Biography*, Scribner, New York, 1970-.

Gottwald = S. Gottwald et al. (eds.), *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt (M.), 1990.

JB = Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Teubner, Stuttgart.

MacTutor = The MacTutor History of Mathematics archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland,
<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>.

MGP = The Mathematics Genealogy Project, Minnesota State University, Mankato, MN, <http://hcoonce.math.mankato.msus.edu>.

Poggendorff = J.C. Poggendorff, *Biographisch-literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften*, Verlag Chemie, Leipzig and Berlin.

Prokhorov = A.M. Prokhorov (Ed.), *Great Soviet Encyclopedia*, Macmillan, New York, and Collier Macmillan, London, 1976.

Recalling the compatibility of VP's three articles on differential equations in Volume II (pp. 301-401), there exist at least 200 papers following up the matter; of these 150 even have the name of VP in the title of their papers. The impact of some of VP's results in this volume are just as spectacular: Checking the computer under MathSciNet it will be observed that there are a couple of thousand papers mentioning VP in their bibliography, and some 200 papers in which VP's name is to be found in the titles of these papers. This refers especially to VP's papers on the *fonction d'angle* (angle function) of de La Vallée Poussin, his delayed means, as well as his extension of the alternation theorem.

All in all, this is indeed a "heavy" volume. It again shows de La Vallée Poussin at his very best. He was a "loner" in mathematics without a real school, apparently without a "labby" behind him, his homeland being a small country.

What a pity for mathematics!

In our biography¹ of VP we listed some of the foreign mathematicians attending the celebrations on the occasion of VP's 25 years in office at Louvain University on May 13, 1928. In the area of approximation theory there were

¹The "golden age" of mathematics in Belgium was the period c. 1860-1885, the time of de Peyster, See the Actes du Colloque International "Roux Vierstraete" (1985), Antwerp, 1985. Unfortunately, it has not been examined nor studied, while several other countries have done so, and most likely as far back as 1900. In fact, it is hard now to find in the literature any reference to the Belgian school of mathematics, except for a few articles by G. Birkhoff, C. D. Olds, and C. O. Dodge, and one by L. T. Carothers, "The work of Charles de la Vallée Poussin", in *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 46, No. 1, pp. 1-16.

Commentators for the four volumes

- G. ANGER, Professor Emeritus, University of Halle, Germany
- T.M. APOSTOL, Professor Emeritus, California Institute of Technology, Pasadena, USA
- A. BRUCKNER, Professor Emeritus, University of California, Santa Barbara, USA
- P.L. BUTZER, Professor Emeritus, Aachen University of Technology, Germany
- CH.A. DE LA VALLÉE POUSSIN (1909-1999), Bruxelles
- H. GÜNZLER, Professor Emeritus, Christian-Albrechts-University, Kiel, Germany
- G.B. GUSTAFSON, Professor, University of Utah, Salt Lake City, USA
- R.E. HENSTOCK, Professor Emeritus, University of Ulster, Coleraine, Northern Ireland
- J.A. JENKINS, Professor Emeritus, Washington University, St. Louis, USA
- J.P. KAHANE, Professor Emeritus, Université de Paris-Sud, Orsay, France
- J. MAWHIN, Professor, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium
- J. MEINGUET, Professor Emeritus, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium
- A.F. MONNA (1909-1995), Professor Emeritus, University of Utrecht, The Netherlands
- P. NASTASI, Professor, University of Palermo, Italy
- R.J. NESSEL, Professor, Aachen University of Technology, Germany
- E. SENETA, Professor, University of Sydney, Australia
- R.L. STENS, Professor, Aachen University of Technology, Germany
- B.S. THOMSON, Professor, Simon Fraser University, Burnaby, Canada

Bibliography of Charles J. de La Vallée Poussin

- (VI) ASSB-I : *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, première partie*
ASSB-II : *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, deuxième partie*
ASSB-1 : *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Série I*
BARB : *Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*
CRAS : *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*
JMPA : *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*
MARB : *Mémoires in-8° de l'Académie Royale de Belgique*
RQS : *Revue des Questions Scientifiques*

Remark : Roman numbers below indicate the volume of *Collected Works* which contains the paper.

Scientific papers

1. Sur une démonstration des formules de Fourier généralisées, *ASSB-I* 15 (1891), 39-41. (III)
2. Sur des intégrales à limites infinies d'une forme particulière, *ASSB-I* 16 (1892), 6-8. (II)
3. Sur certaines inégalités et leur application au calcul intégral, *ASSB-I* 16 (1892), 8-11. (II)
4. Sur la série de Weierstrass représentant une fonction continue sans dérivée, *ASSB-I* 16 (1892), 57-62. (III)
5. Etude des intégrales à limites infinies pour lesquelles la fonction sous le signe est continue, suivie d'une Note I sur l'application du théorème XIV aux fonctions eulériennes, d'une Note II sur l'introduction de la notion de convergence uniforme dans la théorie des intégrales définies et d'une Note III sur un point de la théorie des intégrales doubles, *ASSB-II* 16 (1892), 150-180. (II)
6. Sur les intégrales doubles, *Note III* in PH. GILBERT, *Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire*, 4^e éd., Gauthier-Villars, Paris, 1892, 569-570. (II)

7. Recherches sur la convergence des intégrales définies, *JMPA* (4) 8 (1892), (II)
421-467.
8. Note sur les séries dont les termes sont fonctions d'une variable complexe,
Journal de Ciencias Mathematicas e Astronomicas (Coimbra) 11 (1892), (IV)
77-81.
9. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles, suivi d'un Appendice sur la comparaison des principales démonstrations de l'existence des intégrales, *MARB* 47 (1893), 82 pp. (II)
10. Sur l'intégration des équations différentielles, *ASSB-I* 17 (1893), 8-12. (II)
11. Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson, *ASSB-II* 17 (1893), (III)
18-35.
12. Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, *ASSB-II* 17 (1893), 323-333. (IV)
13. Sur la méthode de Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet,
ASSB-I 18 (1894), 11-12. (IV)
14. Sur la théorie des formes quadratiques binaires, *ASSB-I*, 19 (1895), 59-60. (I)
15. Sur les fractions continues et les formes quadratiques, *ASSB-I* 19 (1895), (I)
111-113.
16. Sur la géométrie non euclidienne, *ASSB-II* 19 (1895), 17-26. Repr. in
Mathesis, 1895. (II)
17. Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques, suivi d'une Note complémentaire sur quelques propriétés des formes binaires, *MARB* 53 (1896), 59 pp. (I)
18. Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique, *MARB* 53 (1896), 32 pp. (I)
19. Sur la série de Lambert, *ASSB-I*, 20 (1896), 56-62. (IV)
20. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Première partie. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général, suivi d'un Appendice sur des réflexions applicables à une formule donnée par Riemann, *ASSB-II* 20 (1896), 183-256. (I)
21. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Deuxième partie. Les fonctions de Dirichlet et les nombres premiers de la forme linéaire $Mx + N$, *ASSB-II* 20 (1896), 281-362. (I)

22. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Troisième partie. Les formes quadratiques de déterminant négatif, suivi d'une Note sur une démonstration de M. Hadamard et sur une simplification de la première partie, et d'une Rectification à la première partie, *ASSB-II* 20 (1896), 363-397. (I)
23. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Résumé de la deuxième et de la troisième partie. *ASSB-I*, 21 (1897), 1-13. (I)
24. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Résumé de la quatrième partie. *ASSB-I* 21 (1897), 60-72. (I)
25. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Quatrième partie. Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant positif, *ASSB-II* 21 (1897), 251-342. (I)
26. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Cinquième partie. Nombres premiers représentables simultanément par une forme linéaire et une forme quadratique, *ASSB-II*, 21 (1897), 343-368. (I)
27. Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, *ASSB-I* 22 (1898), 84-90. (I)
28. Sur la théorie des nombres premiers, in *Verhandlungen des Erstes Internationale Mathematiker-Kongresses* (Zürich), Teubner, Leipzig, 1898, 194-195. (I)
29. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, in *Compte Rendu du Quatrième Congrès scientifique international des Catholiques* (Fribourg, Suisse), Oeuvre de Saint-Paul, Fribourg, 1898, 101-102. (I)
30. Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, *MARB* 49 (1899), 74 pp. Repr. in *Colloque sur la théorie des nombres* (Bruxelles), CBRM, Bruxelles, 1955, 9-66. (I)
31. Réduction des intégrales multiples généralisées, *JMPA* (5) 5 (1899), 191-204. (II)
32. Sur la surface de révolution minimum, *ASSB-I* 24 (1900), 49-52. (II)
33. Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée, *ASSB-II* 26 (1902), 1-12. Repr. in *Mathesis*. (IV)
34. Sur la définition de l'aire des surfaces courbes, *ASSB-I* 27 (1903), 90-91. (II)
35. Sur la fonction sans dérivée de Weierstrass, *ASSB-I* 27 (1903), 92-95. (III)

36. Sur la réduction des équations différentielles linéaires à une inconnue, *ASSB-I* 29 (1905), 63-67. (II)
37. Intégration de l'équation de Bessel sous forme finie, *ASSB-I* 29 (1905), 140-143. (II)
38. Définition des intégrales définies dans le cas où la fonction sous le signe intégral devient infinie, *ASSB-I* 29 (1905), 205. (II)
39. Continuité des intégrales des équations différentielles contenant un paramètre - Existence et continuité de leurs dérivées par rapport au paramètre, *ASSB-II* 30 (1906), 288-294. (II)
40. Sur les équations différentielles totales, *ASSB-II* 30 (1906), 295-298. (II)
41. Sur le mouvement instantané le plus général d'un solide, *ASSB-I* 31 (1907), 73-77. (II)
42. Etude sur le théorème de Bernoulli, *ASSB-II* 31 (1907), 119-134. (II)
43. Démonstration nouvelle du théorème de Bernoulli, *ASSB-II* 31 (1907), 219-236. (II)
44. Sur la représentation d'un plan sur un autre conservant les circonférences, *ASSB-I* 32 (1908), 70-72. (II)
45. Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites limitées de Fourier, *BARB* (4) 10 (1908), 193-254. (III)
46. Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes, avec une Note sur l'approximation par un polynome d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée, *BARB* (4) 10 (1908), 319-410. (III)
47. Le théorème de Hölditch, *ASSB-I* 33 (1909), 119. (II)
48. Sur l'approximation minimum d'un système d'équations, *ASSB-I* 33 (1909), 173. (III)
49. Sur les enveloppes de courbes planes qui ont un contact d'ordre supérieur avec leurs enveloppées, *Memorie Pontificia Accademia Romana Nuovi Lincei*, 28 (1910), 12 pp. (II)
50. Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental de la théorie des co-variants, *ASSB-II* 34 (1910), 223-229. (I)
51. Réduction des intégrales doubles de Lebesgue. Application à la définition des fonctions analytiques, *BARB* (4) 12 (1910), 768-798. (II)

52. Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, *BARB* (4) 12 (1910), 808-844. Erratum, *BARB* (5) 1 (1911), 211. (III)
53. Sur la méthode de l'approximation minimum, *ASSB-II* 35 (1911), 1-16. (III)
54. Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier, *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, 31 (1911), 1-4. (III)
55. Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe, *BARB* (5) 1 (1911), 199-211. (III)
56. Sur la transformation d'une intégrale multiple en une intégrale simple, *ASSB-I* 35 (1911), 189-190. (II)
57. Sur l'unicité du développement trigonométrique, *BARB* (5) 2 (1912), 702-718 (anounced in *CRAS* 155 (1912), 950-953, same title). (III)
58. Sur l'unicité du développement trigonométrique. Note additionnelle, *BARB* (5) 3 (1913), 9-14. (III)
59. Sur la définition de la différentielle totale et sur les intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites, *ASSB-I* 38 (1914), 67-72. (IV)
60. Sur les propriétés générales des fonctions elliptiques, *ASSB-I* 38 (1914), 157-161. (IV)
61. Démonstration simplifiée du théorème fondamental de M. Montel sur les familles normales de fonctions, *Annals of Mathematics* (2) 17 (1915), 5-11. (IV)
62. Sur l'intégrale de Lebesgue, *Transactions of the American Mathematical Society* 16 (1915), 435-501. (II)
63. Sur les zéros de $\zeta(s)$ de Riemann, *CRAS* 163 (1916), 418-421. (I)
64. Sur les zéros de $\zeta(s)$ de Riemann, *CRAS* 163 (1916), 471-473. (I)
65. Sur les expressions qui s'écartent le moins de zéro dans un intervalle, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 45 (1917), 53-56. (III)
66. L'approximation des fonctions d'une variable réelle, *L'Enseignement Mathématique* 20 (1918), 1-29. (III)
67. Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné, *CRAS* 166 (1918), 799-802. (III)

68. Sur le maximum du module de la dérivée d'une expression trigonométrique d'ordre et de module bornés, *CRAS* 166 (1918), 843-846. (III)
69. Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent, in *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens (Strasbourg)*, Privat, Toulouse, 1920, 57-81. Repr. in *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2) 44 (1920), 267-296, and *O Instituto, Revista Scientifica e Literaria*, 68 (1921), 341-369. (II)
70. Sur l'approximation des fonctions, Résumé de la conférence faite à la Société mathématique, à Bruxelles, le 28 octobre 1922, *Mathesis* 36 (1922), 19-24. (III)
71. Sur une propriété des fonctions entières considérées dans un demi-plan, *Rendiconti del Seminario Matematico della Facoltà delle Scienze della Reale Università Roma* (2) 1 (1923), 7 pp. (IV)
72. Sur le mouvement d'un solide de révolution homogène pesant fixé par un point de son axe, *BARB* (5) 9 (1923), 55-58. (II)
73. Sur les fonctions quasi-analytiques de variables réelles, *CRAS* 176 (1923), 635-638. (III)
74. L'approximation des fonctions de variable réelle, in *Volume delle Lezioni Pubbliche tenute nella Settimana Accademica, Pontificae Accademia Romana dei Nuovi Lincei, Roma, 1923*, 32 pp. (III)
75. Quatre leçons sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52 (1924), 175-203. (III)
76. On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions, with a Note On the determination of periodic functions by means of their initial values, translated from French by G.C. Evans, *Rice Institute Pamphlet* 12 (1925), 105-172. (III)
77. Sur les théorèmes d'existence de la théorie du plan osculateur, *ASSB-I* 46 (1926), 524-542. (II)
78. Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr, *ASSB-II* A-47 (1927), 141-158. (III)
79. Sur les enveloppes de courbes planes, *ASSB-I* A-48 (1928), 5-9. (II)
80. Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr. Note complémentaire et explicative, *ASSB-I* A-48 (1928), 56-57. (III)
81. Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre n , *JMPA* (9) 8 (1929), 125-144. (II)

82. Sur l'unicité de la détermination de l'intégrale d'une équation linéaire d'ordre n par n points dans le domaine complexe, *ASSB-II A-49* (1929), 11-22. (II)
83. Application de l'intégrale de Lebesgue au problème de la représentation d'une aire simplement connexe sur un cercle, *ASSB-II A-50* (1930), 23-34. (IV)
84. Critérium d'existence de la dérivée normale d'un potentiel de surface en un point de la surface active, *ASSB-II A-50* (1930), 132-139. (IV)
85. Sur l'expression asymptotique de la formule de Lord Kelvin donnant le rapport des résistances d'un fil en courant alternatif ou continu, in *Comptes Rendus du Congrès National des Sciences (Bruxelles)*, Bruxelles, 1930, 69-83. (II)
86. Sur la représentation conforme des aires planes multiplement connexes, *CRAS* 190 (1930), 782-784. (IV)
87. Sur la représentation des aires multiplement connexes, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* (3) 47 (1930), 267-309. (IV)
88. Sur la représentation conforme des aires multiplement connexes, *CRAS* 191 (1930), 1414-1418. (IV)
89. Sur la représentation conforme des aires planes multiplement connexes, *BARB* (5) 17 (1931), 10-27. (IV)
90. Sur la représentation conforme des aires planes multiplement connexes, *CRAS* 192 (1931), 128-131. (IV)
91. Sur quelques extensions de la méthode du balayage de Poincaré et sur le problème de Dirichlet, *CRAS* 192 (1931), 651-653. (IV)
92. Mouvement quasi pendulaire du pendule sphérique, *ASSB-I A-52* (1932), 16-22. (II)
93. Mouvement quasipendulaire dans le vide à la surface de la Terre. Pendule de Foucault, *ASSB-I A-52* (1932), 83-98. (II)
94. Sur la résolution de l'équation de Gauss $\sin(z - q) = \lambda \sin^4 z$, *ASSB-II A-52* (1932), 306-313. (II)
95. Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (Paris)* 2 (1932), 169-232. (IV)
96. Utilisation de la méthode du balayage dans la théorie de la représentation conforme, *BARB* (5) 18 (1932), 385-400. (IV)

97. Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée, *CRAS* 193 (1932), 11-13. (IV)
98. Propriétés des fonctions harmoniques de deux variables dans un aire ouverte limitée par des lignes particulières, *CRAS* 195 (1932), 92-94. (IV)
99. Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée, *Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa (scienze fisiche e matematiche)* (2) 2 (1933), 167-197. (IV)
100. Sur l'extension de la méthode du balayage à une aire connexe non étalée, *BARB* (5) 19 (1933), 1217-1229. (IV)
101. Expression nouvelle d'une fonction harmonique positive dans un aire et nulle en tout point du bord sauf un, *ASSB-II A-53* (1933), 113-122. (IV)
102. Détermination des fonctions harmoniques dans une aire A et qui s'annulent en tout point du bord sauf un, *ASSB-II A-54* (1934), 55-67. (IV)
103. Potentiel et problème généralisé de Dirichlet, *Mathematical Gazette* 22 (1938), 17-36.
104. Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels, *BARB* (5) 24 (1938), 368-384.
105. Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels (deuxième note), *BARB* (5) 24 (1938), 672-689.
106. Sur les extrémales d'une certaine intégrale I et l'appoint qu'elles apportent à un théorème général d'unicité concernant l'intégrale d'une équation différentielle linéaire, *Acta Pontificale Academia Scientiarum* 12 (1948), 141-160. (II)
107. Sur la différentielle totale, *ASSB-1* 64 (1950), 74-75. (IV)
108. Le théorème de Picard du point de vue topologique, *ASSB-1* 69 (1955), 37-49.
109. Théorème de Picard et structure des fonctions. Rectifications et compléments, *ASSB-1* 70 (1956), 81-86. (IV)
110. Fonctions périodiques douées de valeurs exceptionnelles. Structure. Théorème de Picard, *ASSB-1* 71 (1956), 73-88. (Ahlfors) (IV)
111. Valeurs exceptionnelles des fonctions continues et uniformes. Fondements du théorème de Picard, *ASSB-1* 73 (1959), 295-301. (IV)

Books and monographs

- B-1. *Cours d'analyse infinitésimale*. Autographie in-4°, 2 vol. Uystpruyst, Louvain, 1898, 212 pp.; 1899, 222 pp.
- B-2. *Cours d'analyse infinitésimale. Tome I.* in-8°, Uystpruyst, Louvain et Gauthier-Villars, Paris, 1st ed., 1903, xiv + 372 pp.; 2nd ed., 1909, xii + 423 pp.; 3rd ed., 1914, ix + 452 pp.; 4th ed., 1921, x + 434 pp.; 5th ed., 1923, vii + 436 pp.; 6th ed., 1926, vii + 436 pp.; 7th ed., 1930, viii + 448 pp.; 8th ed., 1938, x + 460 pp.; 9th ed., 1947, x + 480 pp.; 11th ed., 1954, viii + 480 pp.; 12th ed., 1959, viii + 484 pp. (8th to 12th ed. in collab. with F. Simonart).
- B-3. *Cours d'analyse infinitésimale. Tome II.* In-8°, Uystpruyst, Louvain et Gauthier-Villars, Paris. 1st ed., 1906, xvi + 440 pp.; 2nd ed., 1912, ix + 464 pp.; 3rd ed., 1914, destroyed in First World War; unpublished; 4th ed., 1922, xiv + 478 pp.; 5th ed., 1925, xi + 478 pp.; 6th ed., 1928, viii + 478 pp.; 7th ed., 1938, x + 524 pp.; 8th ed., 1949, viii + 548 pp.; 9th ed., 1957, viii + 552 pp. (8th and 9th ed. in collab. with F. Simonart). Russian translation of the 3rd ed. of vol. 1, Petrograd, 1921, and of the 2nd ed. of vol. 2, Leningrad, 1933. Reprint by Dover of the 8th ed. of vol. 1 and of the 7th ed. of vol. 2 in 1946.
- B-4. *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire.* In-8°, Gauthier-Villars, Paris. 1st ed., 1916, viii + 154 pp.; 2nd ed., 1934, xii + 193 pp.
- B-5. *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle.* In-8°, Gauthier-Villars, Paris, 1919, vi + 151 pp. Repr. by Chelsea in *L'approximation*, by S. Bernstein and Ch. de La Vallée Poussin, two volumes in one, 1966.
- B-6. *Introducción a las teorías de conjuntos y de funciones.* In-8°, Librería General de Victoriano Suárez, Madrid, 1921, xxii + 109 pp.
- B-7. *Leçons de mécanique analytique. Tome I.* In-8°, Uystpruyst, Louvain et Gauthier-Villars, Paris. 1st ed., 1924, vii + 281 pp.; 2nd ed., 1932, xi + 291 pp.
- B-8. *Leçons de mécanique analytique. Tome II.* In-8°, Uystpruyst, Louvain et Gauthier-Villars, Paris, 1925, xi + 315 pp.
- B-9. *Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet.* In-8°, Actualités scientifiques et industrielles No. 578, Hermann, Paris, 1937, 47 pp. (IV)

- B-10. *Le potentiel logarithmique. Balayage et représentation conforme.* In-8°, Uystpruyt, Louvain et Gauthier-Villars, Paris, 1949, xii + 452 pp.
101. Expression nouvelle d'une fonction harmonique positive dans un cercle et dans les parties extérieures à ce cercle. Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
102. Équation de Schrödinger et équation de Poisson dans un cercle. Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
103. Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels (deuxième partie). Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
104. Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels (troisième partie). Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
105. Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels (deuxième partie). Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
106. Sur les extrémales d'une certaine intégrale I et l'apprent qu'en se rapportant à un théorème général d'unicité concernant l'intégrale d'une équation différentielle linéaire. Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
107. Sur la différentielle totale. Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
108. Calcul des intégrales multiples. Méthode de la transformation de Laplace. Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
109. Fonctions périodiques doubles de valeurs exceptionnelles. Structure. Théorie des fonctions périodiques doubles de valeurs exceptionnelles. Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
110. Fonctions périodiques doubles de valeurs exceptionnelles. Fonctions fondamentales. Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)
111. Valeurs exceptionnelles des fonctions continues et uniformes. Fondements de l'analyse mathématique. Gauthier-Villars, Paris, 1949, 128 pp. (IV)

Plan of the Collected Works

Each volume contains all VP's papers in the specific fields under discussion, together with the corresponding commentaries, distributed as follows.

- Volume I : **Biography and Number theory**
 - Biographies : BURKILL, BUTZER, DE LA VALLÉE POUSSIN, FAVARD, LEMAÎTRE, MAWHIN, MONTEL, NASTASI
 - Number theory : APOSTOL
- Volume II : **Integration, measure, probability, ordinary differential equations, geometry, mechanics**
 - Integration : HENSTOCK
 - Decomposition theorem : BRUCKNER-THOMSON
 - Probability : SENETA
 - Ordinary differential equations : GUSTAFSON, MAWHIN
- Volume III : **Approximation theory, Fourier analysis, quasi-analytic functions**
 - Approximation : BUTZER-NESSEL
 - Chebychev approximation : MEINGUET
 - Interpolation and sampling : BUTZER-STENS
 - Fourier series : KAHANE
 - Almost periodic functions : GÜNZLER
 - Quasi-analytic functions : GÜNZLER
- Volume IV : **Complex functions, conformal representation, potential theory**
 - Conformal representation : JENKINS
 - Potential theory : ANGER, MONNA
 - Complex functions : MAWHIN