

Charles-Jean de La Vallée Poussin

**COLLECTED WORKS**  
**OEUVRES SCIENTIFIQUES**

**Volume IV**

Potential theory, conformal representation,  
complex functions

Théorie du potentiel, représentation conforme,  
fonctions d'une variable complexe

*Edited by*

*Edité par*

Paul Butzer      Jean Mawhin  
Pasquale Vetro



ACADÉMIE ROYALE  
DE BELGIQUE



CIRCOLO MATEMATICO  
DI PALERMO

2017





**Charles-Jean de La Vallée Poussin**

**COLLECTED WORKS  
OEUVRES SCIENTIFIQUES**

**Volume IV**

Potential theory, conformal representation,  
complex functions

Théorie du potentiel, représentation conforme,  
fonctions d'une variable complexe

*Edited by*

*Edité par*

Paul Butzer      Jean Mawhin  
Pasquale Vetro



ACADÉMIE ROYALE  
DE BELGIQUE



CIRCOLO MATEMATICO  
DI PALERMO

2017

*Editors*

Paul Butzer  
Lehrstuhl A für Mathematik  
RWTH Aachen  
52056 Aachen  
Germany

Jean Mawhin  
Département de Mathématique  
Université Catholique de Louvain  
1348 Louvain-la-Neuve  
Belgium

Pasquale Vetro  
Circolo Matematico di Palermo  
Via Archirafi no. 34  
90123 Palermo  
Italy

Charles-Jean de La Vallée Poussin: Collected Works (Vol. IV)

ISBN 978-88-943123-0-0

© Circolo Matematico di Palermo 2017

This work is subject to copyright.

Circolo Matematico di Palermo,  
Via Archirafi no. 34, 90123, Palermo, Italy





## Contents – Table des matières

Foreword .....	xi
Abbreviations used .....	xiii
Commentators for the four volumes .....	xv
Bibliography of Charles J. de La Vallée Poussin .....	xvii
Plan of the Collected Works .....	xxvii

### Potential theory – Théorie du potentiel

CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN :

*(The numbers in brackets refer to the bibliography, p. xvii)*

Sur la méthode de Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet [13]	3
Critérium d'existence de la dérivée normale d'un potentiel de surface en un point de la surface active [84] .....	5
Sur quelques extensions de la méthode du balayage de Poincaré et sur le problème de Dirichlet [91] .....	13
Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet [95] .....	17
Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée [97] .....	81
Propriétés des fonctions harmoniques de deux variables dans une aire ouverte limitée par des lignes particulières [98] .....	85
Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée [99] .....	89
Sur l'extension de la méthode du balayage à une aire connexe non étalée [100] .....	121
Expression nouvelle d'une fonction harmonique positive dans une aire et nulle en tout point du bord sauf un [101] .....	135
Détermination des fonctions harmoniques dans une aire $A$ et qui s'annulent en tout point du bord sauf un [102] .....	145
Potentiel et problème généralisé de Dirichlet [103] .....	159
Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels [104] ....	179
Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels (deuxième note) [105] .....	197
Gauss et la théorie du potentiel [112] .....	215



G. ANGER :	
The contributions of Ch.-J. de La Vallée Poussin to potential theory.	
The power of theory .....	233
A. MONNA :	
Introduction to Ch.-J. de La Vallée Poussin's work on potential theory .	275
J. MAWHIN AND M. WILLEM :	
De La Vallée Poussin's choice theorem for sequences of measures .....	285

## Conformal representation – Représentation conforme

CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN :	
( <i>The numbers in brackets refer to the bibliography, p. xvii</i> )	
Application de l'intégrale de Lebesgue au problème de la représentation	
d'une aire simplement connexe sur un cercle [83] .....	305
Sur la représentation conforme des aires planes multiplement connexes [86]	317
Sur la représentation des aires multiplement connexes [87] .....	321
Sur la représentation conforme des aires planes multiplement connexes [88]	365
Sur la représentation conforme des aires planes multiplement connexes [89]	371
Sur la représentation conforme des aires planes multiplement connexes [90]	389
Utilisation de la méthode du balayage dans la théorie de la	
représentation conforme [96] .....	393
J.A. JENKINS :	
De La Vallée Poussin's contributions to conformal mapping theory .....	409

## Complex functions – Fonctions d'une variable complexe

CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN :	
( <i>The numbers in brackets refer to the bibliography, p. xvii</i> )	
Note sur les séries dont les termes sont fonctions d'une	
variable complexe [8] .....	425
Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la	
théorie des fonctions d'une variable complexe [12] .....	431
Sur la série de Lambert [19] .....	439
Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique	
et celles de sa dérivée [33] .....	447
Sur la définition de la différentielle totale et sur les intégrales curvilignes	
qui ne dépendent que de leurs limites [59] .....	459
Sur les propriétés générales des fonctions elliptiques [60] .....	465
Démonstration simplifiée du théorème fondamental de M. Montel	
sur les familles normales de fonctions [61] .....	471
Sur une propriété des fonctions entières considérées dans un demi-plan [71]	479
Sur la différentielle totale [107] .....	487

Le théorème de Picard du point de vue topologique [108] .....	489
Théorème de Picard et structure des fonctions.	
Rectifications et compléments [109] .....	503
Fonctions périodiques douées de valeurs exceptionnelles.	
Structure. Théorème de Picard [110] .....	509
Valeurs exceptionnelles des fonctions continues et uniformes.	
Fondements du théorème de Picard [111] .....	525
List and location of biographical notices .....	533
Erratum to Vol. III .....	535



# Foreword

Charles de La Vallée Poussin's (VP for short) profound contributions encompassed several areas of mathematics, like number theory, the subject of Volume I, integration theory, ordinary differential equations, and probability, the topics under consideration in Volume II, the broad areas of approximation and interpolation theory, Fourier analysis and quasi-analytic functions, the subjects of Volume III. This final Volume IV covers potential theory, conformal representation, and functions of a complex variable.

The papers are organized by coherence of subject matter rather than by chronology, so that VP's intellectual evolution may stand out. Volume I also included several papers on the life and work of de La Vallée Poussin by different authors, together with articles on the mathematical environment of VP at his home university, the University of Louvain (Leuven), his connections with the *Société scientifique de Bruxelles*, founded in 1875, the *Académie royale de Belgique*, founded in 1769/72, as well as with four scientific and academic institutions in Italy, including the renowned *Circolo Matematico di Palermo*, founded by G. B. Guccia together with 27 colleagues in 1884.

As indicated, the present volume covers, in this order, VP's work in potential theory, conformal representation and functions of a complex variable. The interest of VP in potential theory started in the years 1930 and was mostly motivated by the application of measure theory to Poincaré's sweeping out method (balayage). Its contributions are contained in thirteen papers and two monographs, namely *Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet* published by Hermann in 1937, and *Le potentiel logarithmique. Balayage et représentation conforme*, whose publication in 1949 was delayed by the Second World War. They are not reproduced here. Most aspects of de La Vallée Poussin's contributions to potential theory and their important influence on the development of this fundamental domain of mathematics are well described in the careful analysis of Antonie F. Monna (1909-1995), of Gottfried Anger, and of Jean Mawhin and Michel Willem.

The contributions of VP into conformal mappings, concentrated in the period 1930-1932 are no less fundamental. They deal with the problem of the conformal representation of simply and multiply connected areas. They are described in two classical monographs *Leçons sur la représentation conforme des aires simplement connexes* and *Leçons sur la représentation conforme des aires multiples connexes* of Gaston Julia and are very nicely analyzed in the contribution of James A. Jenkins (1923-2012) contained in this volume.

Even if VP is mostly praised as an original contributor to the theory of functions of real variables, his interest in the theory of functions of a complex variable started already in the end of the 19th century and ended with his last publication, sixty-seven years later! His proof of the prime number theory was based upon fine properties of entire functions, and his original contributions to conformal mapping theory were closely related to the theory of functions of a complex variable. They have been commented in Volumes I and IV. VP's other contributions to this area deal with various scattered questions and consist mostly of new proofs of known results. This is the reason why they are reproduced without commentaries in the third part of this fourth volume.

The short biographies attached as footnotes to the commentaries have been prepared by the editors, who are responsible for their contents. Since these have caught the pleasant attention of several readers of the previous volumes, a list of all the mathematicians covered in the biographical notes is contained in this last volume, with mention of where they are to be found. The mathematicians covered were either cited by VP, somehow connected with him, or followed up his work in his time.

The editors of these *Collected Works* would like to thank warmly Augusto Ponce, professor at the Université catholique de Louvain, for his enthusiastic and efficient contribution to the publication of Volume IV. His role in 'awaking the sleeping beauty' some thirteen years after the publication of Volume III has been invaluable.

The editors again wish the readers of this last volume to have as much pleasure in studying it as had the authors of the commentaries and the editors in their work and preparations.

P.L. Butzer (Aachen)

J. Mawhin (Louvain-la-Neuve)

P. Vetro (Palermo)

### Abbreviations used

DSB = *Dictionary of Scientific Biography*, Scribner, New York, 1970– .

Gottwald = S. Gottwald et al. (eds.), *Lexikon bedeutender Mathematiker*, Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt (M.), 1990.

JB = Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Teubner, Stuttgart.

MacTutor = The MacTutor History of Mathematics archive, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland,

<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html>.

MGP = The Mathematics Genealogy Project, Minnesota State University, Mankato, MN, <http://hcoonce.math.mankato.msus.edu>.

Poggendorff = J.C. Poggendorff, *Biographisch-literarisches Handwörterbuch der exakten Naturwissenschaften*, Verlag Chemie, Leipzig and Berlin.

Prokhorov = A.M. Prokhorov (Ed.), *Great Soviet Encyclopedia*, Macmillan, New York, and Collier Macmillan, London, 1976.



## Commentators for the four volumes

- G. ANGER, Professor Emeritus, University of Halle, Germany
- T.M. APOSTOL (1923-2016), Professor Emeritus, California Institute of Technology, Pasadena, USA
- A.M. BRUCKNER, Professor Emeritus, University of California, Santa Barbara, USA
- P.L. BUTZER, Professor Emeritus, Aachen University of Technology, Germany
- CH.A. DE LA VALLÉE POUSSIN (1909-1999), Bruxelles, Belgium
- H. GÜNZLER, Professor Emeritus, Christian-Albrechts-University, Kiel, Germany
- G.B. GUSTAFSON, Professor, University of Utah, Salt Lake City, USA
- R.E. HENSTOCK (1923-2007), Professor Emeritus, University of Ulster, Coleraine, Northern Ireland, UK
- J.A. JENKINS (1923-2012), Professor Emeritus, Washington University, St. Louis, USA
- J.P. KAHANE (1926-2017), Professor Emeritus, Université de Paris-Sud, Orsay, France
- J. MAWHIN, Professor Emeritus, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium
- J. MEINGUET, Professor Emeritus, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium
- A.F. MONNA (1909-1995), Professor Emeritus, University of Utrecht, The Netherlands
- P. NASTASI, Professor, University of Palermo, Italy
- R.J. NESSEL, Professor, Aachen University of Technology, Germany
- E. SENETA, Professor, University of Sydney, Australia



- R.L. STENS, Professor, Aachen University of Technology, Germany
- B.S. THOMSON, Professor, Simon Fraser University, Burnaby, Canada
- M. WILLEM, Professor, Université catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium

# Bibliography of Charles J. de La Vallée Poussin

*ASSB-I* : Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, première partie  
*ASSB-II* : Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, deuxième partie  
*ASSB-1* : Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, Série I  
*BARB* : Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique  
*CRAS* : Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris  
*JMPA* : Journal de Mathématiques Pures et Appliquées  
*MARB* : Mémoires in-8° de l'Académie Royale de Belgique  
*RQS* : Revue des Questions Scientifiques

**Remark** : Roman numbers below indicate the volume of *Collected Works* which contains the paper.

## Scientific papers

1. Sur une démonstration des formules de Fourier généralisées, *ASSB-I* 15 (1891), 39-41. (III)
2. Sur des intégrales à limites infinies d'une forme particulière, *ASSB-I* 16 (1892), 6-8. (II)
3. Sur certaines inégalités et leur application au calcul intégral, *ASSB-I* 16 (1892), 8-11. (II)
4. Sur la série de Weierstrass représentant une fonction continue sans dérivée, *ASSB-I* 16 (1892), 57-62. (III)
5. Etude des intégrales à limites infinies pour lesquelles la fonction sous le signe est continue, suivie d'une Note I sur l'application du théorème XIV aux fonctions eulériennes, d'une Note II sur l'introduction de la notion de convergence uniforme dans la théorie des intégrales définies et d'une Note III sur un point de la théorie des intégrales doubles, *ASSB-II* 16 (1892), 150-180. (II)
6. Sur les intégrales doubles, *Note III* in PH. GILBERT, *Cours d'analyse infinitésimale. Partie élémentaire*, 4<sup>e</sup> éd., Gauthier-Villars, Paris, 1892, 569-570. (II)
7. Recherches sur la convergence des intégrales définies, *JMPA* (4) 8 (1892), 421-467. (II)

8. Note sur les séries dont les termes sont fonctions d'une variable complexe, *Journal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas (Coïmbra)* 11 (1892), 77-81. (IV)
9. Mémoire sur l'intégration des équations différentielles, suivi d'un Appendice sur la comparaison des principales démonstrations de l'existence des intégrales, *MARB* 47 (1893), 82 pp. (II)
10. Sur l'intégration des équations différentielles, *ASSB-I* 17 (1893), 8-12. (II)
11. Sur quelques applications de l'intégrale de Poisson, *ASSB-II* 17 (1893), 18-35. (III)
12. Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, *ASSB-II* 17 (1893), 323-333. (IV)
13. Sur la méthode de Neumann pour résoudre le problème de Dirichlet, *ASSB-I* 18 (1894), 11-12. (IV)
14. Sur la théorie des formes quadratiques binaires, *ASSB-I*, 19 (1895), 59-60. (I)
15. Sur les fractions continues et les formes quadratiques, *ASSB-I* 19 (1895), 111-113. (I)
16. Sur la géométrie non euclidienne, *ASSB-II* 19 (1895), 17-26. Repr. in *Mathesis*, 1895. (II)
17. Recherches arithmétiques sur la composition des formes binaires quadratiques, suivi d'une Note complémentaire sur quelques propriétés des formes binaires, *MARB* 53 (1896), 59 pp. (I)
18. Démonstration simplifiée du théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique, *MARB* 53 (1896), 32 pp. (I)
19. Sur la série de Lambert, *ASSB-I*, 20 (1896), 56-62. (IV)
20. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Première partie. La fonction  $\zeta(s)$  de Riemann et les nombres premiers en général, suivi d'un Appendice sur des réflexions applicables à une formule donnée par Riemann, *ASSB-II* 20 (1896), 183-256. (I)
21. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Deuxième partie. Les fonctions de Dirichlet et les nombres premiers de la forme linéaire  $Mx + N$ , *ASSB-II* 20 (1896), 281-362. (I)
22. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Troisième partie. Les formes quadratiques de déterminant négatif, suivi d'une Note sur une démonstration de M. Hadamard et sur une simplification de la première partie, et d'une Rectification à la première partie, *ASSB-II* 20 (1896), 363-397. (I)

23. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Résumé de la deuxième et de la troisième partie. *ASSB-I*, 21 (1897), 1-13. (I)
24. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Résumé de la quatrième partie. *ASSB-I* 21 (1897), 60-72. (I)
25. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Quatrième partie. Les nombres premiers représentables par une forme quadratique de déterminant positif, *ASSB-II* 21 (1897), 251-342. (I)
26. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers. Cinquième partie. Nombres premiers représentables simultanément par une forme linéaire et une forme quadratique, *ASSB-II*, 21 (1897), 343-368. (I)
27. Sur les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques, *ASSB-I* 22 (1898), 84-90. (I)
28. Sur la théorie des nombres premiers, in *Verhandlungen des Ersten Internationalen Mathematiker-Kongresses (Zürich)*, Teubner, Leipzig, 1898, 194-195. (I)
29. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, in *Compte Rendu du Quatrième Congrès scientifique international des Catholiques (Fribourg, Suisse)*, Oeuvre de Saint-Paul, Fribourg, 1898, 101-102. (I)
30. Sur la fonction  $\zeta(s)$  de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée, *MARB* 49 (1899), 74 pp. Repr. in *Colloque sur la théorie des nombres (Bruxelles)*, CBRM, Bruxelles, 1955, 9-66. (I)
31. Réduction des intégrales multiples généralisées, *JMPA* (5) 5 (1899), 191-204. (II)
32. Sur la surface de révolution minimum, *ASSB-I* 24 (1900), 49-52. (II)
33. Sur les relations qui existent entre les racines d'une équation algébrique et celles de sa dérivée, *ASSB-II* 26 (1902), 1-12. Repr. in *Mathesis*. (IV)
34. Sur la définition de l'aire des surfaces courbes, *ASSB-I* 27 (1903), 90-91. (II)
35. Sur la fonction sans dérivée de Weierstrass, *ASSB-I* 27 (1903), 92-95. (III)
36. Sur la réduction des équations différentielles linéaires à une inconnue, *ASSB-I* 29 (1905), 63-67. (II)
37. Intégration de l'équation de Bessel sous forme finie, *ASSB-I* 29 (1905), 140-143. (II)
38. Définition des intégrales définies dans le cas où la fonction sous le signe intégral devient infinie, *ASSB-I* 29 (1905), 205. (II)

39. Continuité des intégrales des équations différentielles contenant un paramètre - Existence et continuité de leurs dérivées par rapport au paramètre, *ASSB-II* 30 (1906), 288-294. (II)
40. Sur les équations différentielles totales, *ASSB-II* 30 (1906), 295-298. (II)
41. Sur le mouvement instantané le plus général d'un solide, *ASSB-I* 31 (1907), 73-77. (II)
42. Etude sur le théorème de Bernoulli, *ASSB-II* 31 (1907), 119-134. (II)
43. Démonstration nouvelle du théorème de Bernoulli, *ASSB-II* 31 (1907), 219-236. (II)
44. Sur la représentation d'un plan sur un autre conservant les circonférences, *ASSB-I* 32 (1908), 70-72. (II)
45. Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier, *BARB* (4) 10 (1908), 193-254. (III)
46. Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes, avec une Note sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée, *BARB* (4) 10 (1908), 319-410. (III)
47. Le théorème de Hölditch, *ASSB-I* 33 (1909), 119. (II)
48. Sur l'approximation minimum d'un système d'équations, *ASSB-I* 33 (1909) 173. (III)
49. Sur les enveloppes de courbes planes qui ont un contact d'ordre supérieur avec leurs enveloppées, *Memorie Pontificia Accademia Romana Nuovi Lincei*, 28 (1910), 12 pp. (II)
50. Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental de la théorie des covariants, *ASSB-II* 34 (1910), 223-229. (I)
51. Réduction des intégrales doubles de Lebesgue. Application à la définition des fonctions analytiques, *BARB* (4) 12 (1910), 768-798. (II)
52. Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle, *BARB* (4) 12 (1910), 808-844. Erratum, *BARB* (5) 1 (1911), 211. (III)
53. Sur la méthode de l'approximation minimum, *ASSB-II* 35 (1911), 1-16. (III)
54. Un nouveau cas de convergence des séries de Fourier, *Rendiconti Circolo Matematico di Palermo*, 31 (1911), 1-4. (III)

55. Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe, *BARB* (5) 1 (1911), 199-211. (III)
56. Sur la transformation d'une intégrale multiple en une intégrale simple, *ASSB-I* 35 (1911), 189-190. (II)
57. Sur l'unicité du développement trigonométrique, *BARB* (5) 2 (1912), 702-718 (announced in *CRAS* 155 (1912), 951-953, same title). (III)
58. Sur l'unicité du développement trigonométrique. Note additionnelle, *BARB* (5) 3 (1913), 9-14. (III)
59. Sur la définition de la différentielle totale et sur les intégrales curvilignes qui ne dépendent que de leurs limites, *ASSB-I* 38 (1914), 67-72. (IV)
60. Sur les propriétés générales des fonctions elliptiques, *ASSB-I* 38 (1914), 157-161. (IV)
61. Démonstration simplifiée du théorème fondamental de M. Montel sur les familles normales de fonctions, *Annals of Mathematics* (2) 17 (1915), 5-11. (IV)
62. Sur l'intégrale de Lebesgue, *Transactions of the American Mathematical Society* 16 (1915), 435-501. (II)
63. Sur les zéros de  $\zeta(s)$  de Riemann, *CRAS* 163 (1916), 418-421. (I)
64. Sur les zéros de  $\zeta(s)$  de Riemann, *CRAS* 163 (1916), 471-473. (I)
65. Sur les expressions qui s'écartent le moins de zéro dans un intervalle, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 45 (1917), 53-56. (III)
66. L'approximation des fonctions d'une variable réelle, *L'Enseignement Mathématique* 20 (1918), 1-29. (III)
67. Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle par des expressions d'ordre donné, *CRAS* 166 (1918), 799-802. (III)
68. Sur le maximum du module de la dérivée d'une expression trigonométrique d'ordre et de module bornés, *CRAS* 166 (1918), 843-846. (III)
69. Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent, in *Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens (Strasbourg)*, Privat, Toulouse, 1920, 57-81. Repr. in *Bulletin des Sciences Mathématiques* (2) 44 (1920), 267-296, and *O Instituto, Revista Scientifica e Literaria*, 68 (1921), 341-369. (II)
70. Sur l'approximation des fonctions, Résumé de la conférence faite à la Société mathématique, à Bruxelles, le 28 octobre 1922, *Mathesis* 36 (1922), 19-24. (III)

71. Sur une propriété des fonctions entières considérées dans un demi-plan, *Rendiconti del Seminario Matematico della Facoltà delle Scienze della Reale Università Roma* (2) 1 (1923), 7 pp. (IV)
72. Sur le mouvement d'un solide de révolution homogène pesant fixé par un point de son axe, *BARB* (5) 9 (1923), 55-58. (II)
73. Sur les fonctions quasi-analytiques de variables réelles, *CRAS* 176 (1923), 635-638. (III)
74. L'approximation des fonctions de variable réelle, in *Volume delle Lezioni Pubbliche tenute nella Settimana Accademica*, Pontificae Accademia Romana dei Nuovi Lincei, Roma, 1923, 32 pp. (III)
75. Quatre leçons sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 52 (1924), 175-203. (III)
76. On the approximation of functions of a real variable and on quasi-analytic functions, with a Note On the determination of periodic functions by means of their initial values, translated from French by G.C. Evans, *Rice Institute Pamphlet* 12 (1925), 105-172. (III)
77. Sur les théorèmes d'existence de la théorie du plan osculateur, *ASSB-I* 46 (1926), 524-542. (II)
78. Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr, *ASSB-II* A-47(1927), 141-158. (III)
79. Sur les enveloppes de courbes planes, *ASSB-I* A-48 (1928), 5-9. (II)
80. Sur les fonctions presque périodiques de H. Bohr. Note complémentaire et explicative, *ASSB-I* A-48 (1928), 56-57. (III)
81. Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordre  $n$ , *JMPA* (9) 8 (1929), 125-144. (II)
82. Sur l'unicité de la détermination de l'intégrale d'une équation linéaire d'ordre  $n$  par  $n$  points dans le domaine complexe, *ASSB-II* A-49 (1929), 11-22. (II)
83. Application de l'intégrale de Lebesgue au problème de la représentation d'une aire simplement connexe sur un cercle, *ASSB-II* A-50 (1930), 23-34. (IV)
84. Critérium d'existence de la dérivée normale d'un potentiel de surface en un point de la surface active, *ASSB-II* A-50 (1930), 132-139. (IV)

85. Sur l'expression asymptotique de la formule de Lord Kelvin donnant le rapport des résistances d'un fil en courant alternatif ou continu, in *Comptes Rendus du Congrès National des Sciences (Bruxelles)*, Bruxelles, 1930, 69-83. (II)
86. Sur la représentation conforme des aires planes multiples connexes, *CRAS* 190 (1930), 782-784. (IV)
87. Sur la représentation des aires multiples connexes, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 47 (1930), 267-309. (IV)
88. Sur la représentation conforme des aires planes multiples connexes, *CRAS* 191 (1930), 1414-1418. (IV)
89. Sur la représentation conforme des aires planes multiples connexes, *BARB* (5) 17 (1931), 10-27. (IV)
90. Sur la représentation conforme des aires planes multiples connexes, *CRAS* 192 (1931), 128-131. (IV)
91. Sur quelques extensions de la méthode du balayage de Poincaré et sur le problème de Dirichlet, *CRAS* 192 (1931), 651-653. (IV)
92. Mouvement quasi pendulaire du pendule sphérique, *ASSB-I A*- 52 (1932), 16-22. (II)
93. Mouvement quasipendulaire dans le vide à la surface de la Terre. Pendule de Foucault, *ASSB-I A*-52 (1932), 83-98. (II)
94. Sur la résolution de l'équation de Gauss  $\sin(z - q) = \lambda \sin^4 z$ , *ASSB-II A*-52 (1932), 306-313. (II)
95. Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (Paris)* 2 (1932), 169-232. (IV)
96. Utilisation de la méthode du balayage dans la théorie de la représentation conforme, *BARB* (5) 18 (1932), 385-400. (IV)
97. Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée, *CRAS* 193 (1932), 11-13. (IV)
98. Propriétés des fonctions harmoniques de deux variables dans un aire ouverte limitée par des lignes particulières, *CRAS* 195 (1932), 92-94. (IV)
99. Propriétés des fonctions harmoniques dans un domaine ouvert limité par des surfaces à courbure bornée, *Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa (scienze fisiche e matematiche)* (2) 2 (1933), 167-197. (IV)
100. Sur l'extension de la méthode du balayage à une aire connexe non étalée, *BARB* (5) 19 (1933), 1217-1229. (IV)



101. Expression nouvelle d'une fonction harmonique positive dans un aire et nulle en tout point du bord sauf un, *ASSB-II* A-53 (1933), 113-122. (IV)
102. Détermination des fonctions harmoniques dans une aire  $A$  et qui s'annulent en tout point du bord sauf un, *ASSB-II* A-54 (1934), 55-67. (IV)
103. Potentiel et problème généralisé de Dirichlet, *Mathematical Gazette* 22 (1938), 17-36. (IV)
104. Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels, *BARB* (5) 24 (1938), 368-384. (IV)
105. Points irréguliers. Détermination des masses par les potentiels (deuxième note), *BARB* (5) 24 (1938), 672-689. (IV)
106. Sur les extrémales d'une certaine intégrale  $I$  et l'appoint qu'elles appor- tent à un théorème général d'unicité concernant l'intégrale d'une équation différentielle linéaire, *Acta Pontificale Academia Scientiarum* 12 (1948), 141-160. (II)
107. Sur la différentielle totale, *ASSB-1* 64 (1950), 74-75. (IV)
108. Le théorème de Picard du point de vue topologique, *ASSB-1* 69 (1955), 37-49. (IV)
109. Théorème de Picard et structure des fonctions. Rectifications et complé- ments, *ASSB-1* 70 (1956), 81-86. (IV)
110. Fonctions périodiques douées de valeurs exceptionnelles. Structure. Thé- orème de Picard, *ASSB-1* 71 (1956), 73-88. (Ahlfors) (IV)
111. Valeurs exceptionnelles des fonctions continues et uniformes. Fondements du théorème de Picard, *ASSB-1* 73 (1959), 295-301. (IV)
112. Gauss et la théorie du potentiel, *RQS* 133 (1962), 314-330. (IV)

### Books and monographs

- B-1. *Cours d'analyse infinitésimale*. Autographie in-4°, 2 vol. Uystpruyt, Louvain, 1898, 212 pp.; 1899, 222 pp.
- B-2. *Cours d'analyse infinitésimale. Tome I*. in-8°, Uystpruyt, Louvain et Gauthier-Villars, Paris, 1<sup>st</sup> ed., 1903, xiv + 372 pp.; 2<sup>nd</sup> ed., 1909, xii + 423 pp.; 3<sup>rd</sup> ed., 1914, ix + 452 pp.; 4<sup>th</sup> ed., 1921, x + 434 pp.; 5<sup>th</sup> ed., 1923, vii + 436 pp.; 6<sup>th</sup> ed., 1926, vii + 436 pp.; 7<sup>th</sup> ed., 1930, viii + 448 pp.; 8<sup>th</sup> ed., 1938, x + 460 pp.; 9<sup>th</sup> ed., 10<sup>th</sup> ed., 1947, x + 480 pp.; 11<sup>th</sup> ed., 1954, viii + 480 pp.; 12<sup>th</sup> ed., 1959, viii + 484 pp. (8<sup>th</sup> to 12<sup>th</sup> ed. in collab. with F. Simonart).

- B-3. *Cours d'analyse infinitésimale. Tome II.* In-8°, Uystpruyst, Louvain et Gauthier-Villars, Paris. 1<sup>st</sup> ed., 1906, xvi + 440 pp.; 2<sup>nd</sup> ed., 1912, ix + 464 pp.; 3<sup>rd</sup> ed., 1914, destroyed in First World War; unpublished; 4<sup>th</sup> ed., 1922, xiv + 478 pp.; 5<sup>th</sup> ed., 1925, xi + 478 pp.; 6<sup>th</sup> ed., 1928, viii + 478 pp.; 7<sup>th</sup> ed., 1938, x + 524 pp.; 8<sup>th</sup> ed., 1949, viii + 548 pp.; 9<sup>th</sup> ed., 1957, viii + 552 pp. (8<sup>th</sup> and 9<sup>th</sup> ed. in collab. with F. Simonart). Russian translation of the 3<sup>rd</sup> ed. of vol. 1, Petrograd, 1921, and of the 2<sup>nd</sup> ed. of vol. 2, Leningrad, 1933. Reprint by Dover of the 8<sup>th</sup> ed. of vol. 1 and of the 7<sup>th</sup> ed. of vol. 2 in 1946.
- B-4. *Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire.* In-8°, Gauthier-Villars, Paris. 1<sup>st</sup> ed., 1916, viii + 154 pp.; 2<sup>nd</sup> ed., 1934, xii + 193 pp.
- B-5. *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle.* In-8°, Gauthier-Villars, Paris, 1919, vi + 151 pp. Repr. by Chelsea in *L'approximation*, by S. Bernstein and Ch. de La Vallée Poussin, two volumes in one, 1966.
- B-6. *Introducción a las teorías de conjuntos y de funciones.* In-8°, Librería General de Victoriano Suares, Madrid, 1921, xxii + 109 pp.
- B-7. *Leçons de mécanique analytique. Tome I.* In-8°, Uystpruyst, Louvain et Gauthier-Villars, Paris. 1<sup>st</sup> ed., 1924, vii + 281 pp.; 2<sup>nd</sup> ed., 1932, xi + 291 pp.
- B-8. *Leçons de mécanique analytique. Tome II.* In-8°, Uystpruyst, Louvain et Gauthier-Villars, Paris, 1925, xi + 315 pp.
- B-9. *Les nouvelles méthodes de la théorie du potentiel et le problème généralisé de Dirichlet.* In-8°, Actualités scientifiques et industrielles No. 578, Hermann, Paris, 1937, 47 pp. (IV)
- B-10. *Le potentiel logarithmique. Balayage et représentation conforme.* In-8°, Uystpruyst, Louvain et Gauthier-Villars, Paris, 1949, xii + 452 pp.



# Plan of the Collected Works

Each volume contains all VP's papers in the specific fields under discussion, together with the corresponding commentaries, distributed as follows.

- **Volume I : Biography and Number theory**
  - Biographies: BURKILL, BUTZER-MAWHIN, DE LA VALLÉE POUSSIN, FAVARD, LEMAÎTRE, MONTEL, NASTASI
  - Number theory: APOSTOL, MAWHIN
  
- **Volume II : Integration, measure, probability, ordinary differential equations, mechanics, geometry**
  - Integration theory: HENSTOCK
  - Decomposition theorem: BRUCKNER-THOMSON
  - Probability: SENETA
  - Ordinary differential equations: GUSTAFSON, MAWHIN
  
- **Volume III : Approximation theory, Fourier analysis, quasi-analytic functions**
  - Approximation theory: BUTZER-NESEL
  - Chebyshev approximation: MEINGUET
  - Interpolation and sampling theory: BUTZER-STENS
  - Fourier series: KAHANE
  - Almost periodic functions: GÜNZLER
  - Quasi-analytic functions: GÜNZLER
  
- **Volume IV : Potential theory, conformal representation, complex functions**
  - Potential theory: ANGER, MONNA, MAWHIN-WILLEM
  - Conformal representation: JENKINS